

## Joonelis-nurgalise vastulõike täpsusest

Vello Kala, Nelli Ustinova – TTÜ teedehituse ja geodeesia uurimisrühm, vello.kala@taltech.ee

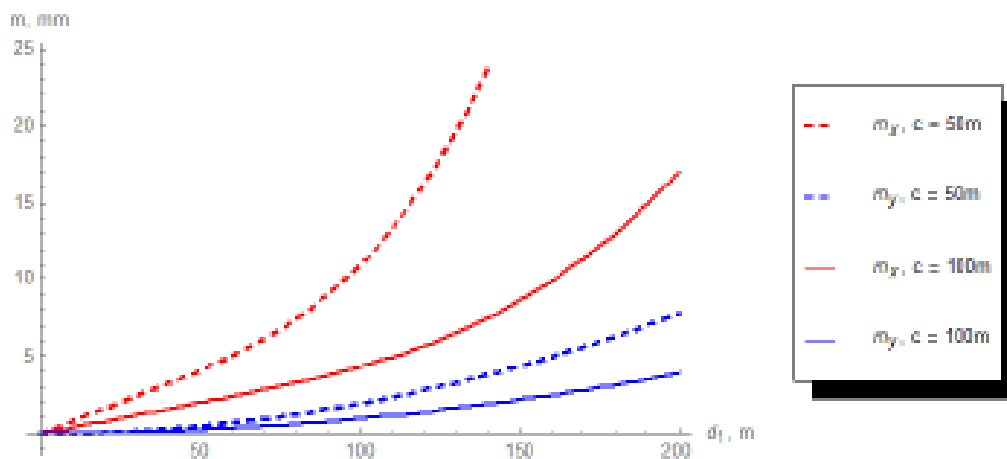
### Sissejuhatus

Kaasaegsed elektrontahhümeetrid võimaldavad kunagise kindlustatud teljepunktide süsteemi asemel kasutada nn vabasid seisupunkte, kusjuures instrumendi koordinaadid määratakse vastulõike (*resection*) abil, mida hõlbustab asjaolu, et meetodi suhteliselt mahukate arvutustööde tarbeks on instrumentides programmid. Eriti populaarseks on muutunud joonelis-nurgaline vastulõike kahele punktile, kusjuures vajalikeks mõõtmisteks on kaugused baaspunktideni ja lisamõõtmiseks nurk nendele punktidele võetud suundade vahel. Baaspunktidena kasutatakse üldjuhul ligidaste ehitiste seintele kindlustatud märke (enamasti helkurkleepsud), mis tagab palju suurema säilivuse, kui on pinnases kindlustatud märkidel ehitusplatside tingimustes. Käesolevas artiklis käsitletakse vastulõike meetodi täpsust.

Vaadeldakse [A. Nikonov, I. Češeva, G. Lifašina, 2013] ja [A. Vivat, V. Litynsky, S. Litynsky, 2018] töödes leitud eksperimentaalseid täpsusi ning [I. Goryainovi, 2015], [V. Avakjani, 2016] ja käesoleva artikli autorite valemite alusel leitud teoreetilisi täpsusi.

### Eksperimentaalsed tulemused

[A. Vivat jt, 2018] sooritasid mõõtmisi 1" tahhümeetriga ja saadud vigade graafikute järgi oli viga piki baasi tunduvalt suurem kui baasiga risti (joonis 1). Pikema baasi puhul olid vead väiksemad. Vastavalt lisatud graafikule ulatusid 50 m pikkuse baasi suunalised vead 10 mm ja baasiga ortogonaalsed vead 2 mm. 100 m baasi puhul olid vastavad suurused 4 ja 1 mm.



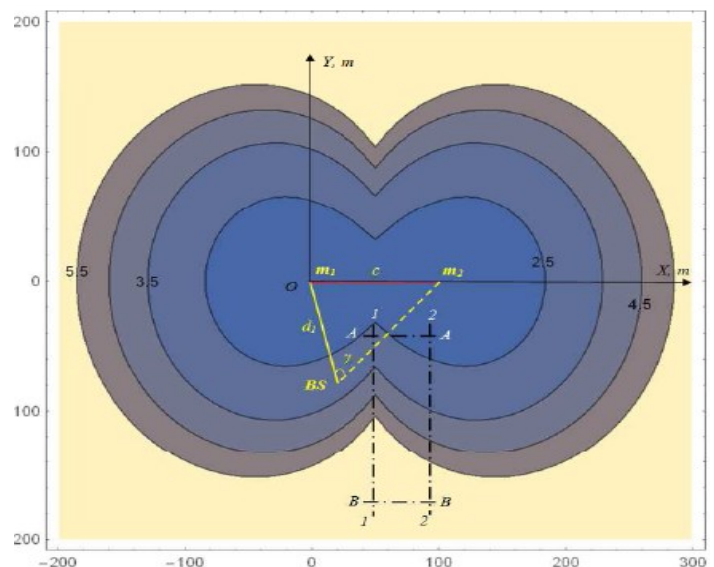
**Joonis 1.** Vertikaalteljel – vastulõikega määratava punkti koordinaatide vead mm. Horisontaalteljel – kaugus ligema lähtepunktini m. Kõrvaleoleval legendil on toodud koordinaatide vigade graafikute tähistused vastavalt baaspunktide vahelisele kaugusele (c). [A. Vivat jt, 2018]

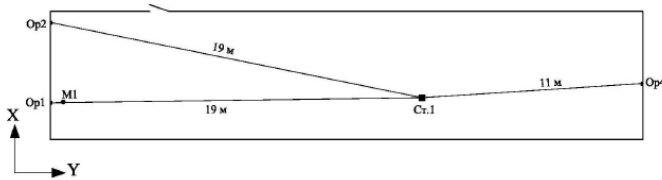
Joonisel 2 toodud vigade diagrammilt nähtub, et saadud vigade suurused olenevad eeskätt määratava punkti ja tingkoordinaatide alguseks võetud vasakpoolse baaspunkti vahekaugusest, kuid lõikenurgast  $\gamma$  oleneb viga tühisel määral.

Peab ütlema, et see järeldus on põhimõtteliselt õige, kuid tekib teine piirang, millest edaspidi.

Vaatleme ka [Nikonov jt, 2013] eksperimentaalseid joonelis-nurgalise vastulõike mõõtmisi laboratooriumis, kus kasutati kolme lähtepunkti, vt joonis 2.

**Joonis 2.** Kahele punktile sooritatud nurgalis-joonelis- vastulõike vigade diagramm. [Vivat jt, 2018]. Piirdel on toodud lähte- ja määratavate punktide koordinaadistik m. Diagrammil on näidatud vigade samajooned mm.





**Joonis 3.** [A. Nikonovi jt, 2013] mõõtmiste skeem. Kaugus Cr.1–M1 on 18 m, kaugus Cr.1–Op1 19 m.

Mõõtmistel kasutati elektrontahhümeetri Leica TS-02, kuid kahjuks ei olnud autorid märkinud, millise täpsusega instrumenti kasutati (võimalikud on variandid 2", 3", 5", 7"). Mõõtmised toimusid väikestel kaugustel (10...20 m). Lähtepunkti M1 nihutati X-telje suunas vähehaaval kuni ±10 mm ja Y-telje suunas –4...+5 mm. Nihkeid mõõdeti vahetult 0,1 mm täpsusega. Kokkuvõttlikult tehti **väikeste kauguste** jaoks (kuni 20 m) kaks järelt:

1. Vastulõike ühe lähtepunkti M1 nihutamisel 5 mm (st nagu 5 mm suuruse vea puhul) ei ületa määratava punkti Cr.1 koordinaatide vead 2 mm, kuid instrumendi automaatse orienteerumise viga võib ulatuda 20".
2. Üldjuhul on määratava punkti koordinaatide vead kuni kolm korda väiksemad ühe lähtepunkti nihkest, aga instrumendi automaatse orienteerumise viga on kolm korda väiksem lähtesuuna Cr.1–M1 veast, mis on tekkinud lähtepunkti M1 nihkest.

**Joonelis-nurgalise lõike apriorsete täpsushinnangute valemid**

**Klassikaline** kahele punktile sooritatud joonelise lõike valem on

$$M_J = \frac{m_s \sqrt{2}}{\sin \beta}, \tag{1}$$

kus  $m_s$  on joonemõõtmise instrumentaalne KRV ja  $\beta$  – lõikenurk.

Arvestame veel lähtepunktide vea mõju joonelisel lõikel [Kiselev, Mihelev, 2008]

$$m_{LPs} = \frac{m_{AB}}{\sin \beta}, \tag{2}$$

kus lähtepunktide vead  $m_{AB}$  saame üldtuntud valemist (3), eeldades (nüüd ja edaspidi), et lähtepunktide asukohad määrati ligikaudu samalt vertikaalilt, kus asub määratav punkt.

$$m_{AB} = \sqrt{m_s^2 + \frac{D^2 m_\beta^2}{\rho^2}}. \tag{3}$$

Seega joonelise lõike koguveaks saaks klassikaliste valemite abil

$$M = \sqrt{M_J^2 + m_{LPs}^2}. \tag{4}$$

[Goryainov, 2015] töötas joonelis-nurgalise vastulõike täpsuse arvutamiseks kahe lähtepunkti puhul välja järgmise valemi:

$$m_P = \sqrt{m_2^2 + m_b^2 + b^2 \left\{ \frac{m_2^2 \times \sin^2 \alpha}{a^4 \times \cos^2 \gamma} \left[ \left( c \times \cot \alpha \frac{m_\alpha}{\rho} \right)^2 + m_c^2 + \left( \frac{c}{a} m_1 \right)^2 \right] \right\}}, \tag{5}$$

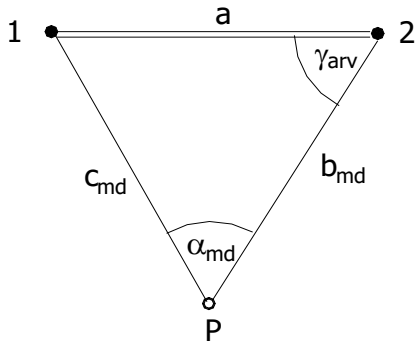
kus  $m_1, m_2$  on lähtepunktide keskmised ruutvead (KRV);  $b, c$  – lõikejoonte pikkused;  $a$  – baasjoone pikkus;  $\alpha$  – lõikenurk määratava punkti P juures;  $m_\alpha$  – baasjoone direktsiooninurga KRV;  $\gamma$  – baasiga külgnev nurk;  $m_b, m_c$  – lõikejoonte KRV. Valem on küll võrdlemisi kohmakas, kuid EXCELis suhteliselt lihtsalt programmeeritav.

Peale selle olid eelmainitud Goryainovi artiklis toodud ka kahele punktile tehtud tasandamata joonelis-nurgalise lõike arvutusalgortim ja selle liikmete järkjärgulisel diferentseerimisel saadud üksikvalemid, millest hiljem oligi moodustatud valem (5). Need valemid olid järgmised:

$$\frac{m_\gamma}{\rho} = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \gamma \times a^2} \left[ \left( c \times \cot \alpha \frac{m_\alpha}{\rho} \right)^2 + m_c^2 + \left( \frac{c}{a} m_1 \right)^2 \right]}, \tag{6}$$

$$\frac{m_{\alpha(1.2)}}{\rho} = \frac{m_2}{a}, \tag{7} \quad m_{\Delta P} = \sqrt{m_b^2 + \left( \frac{b \times m_{\alpha(2.P)}}{\rho} \right)^2}, \tag{9}$$

$$m_{\alpha(2.P)} = \sqrt{m_{\alpha(1.2)}^2 + m_\gamma^2}, \tag{8} \quad m_P = \sqrt{m_{\Delta P}^2 + m_2^2}. \tag{10}$$

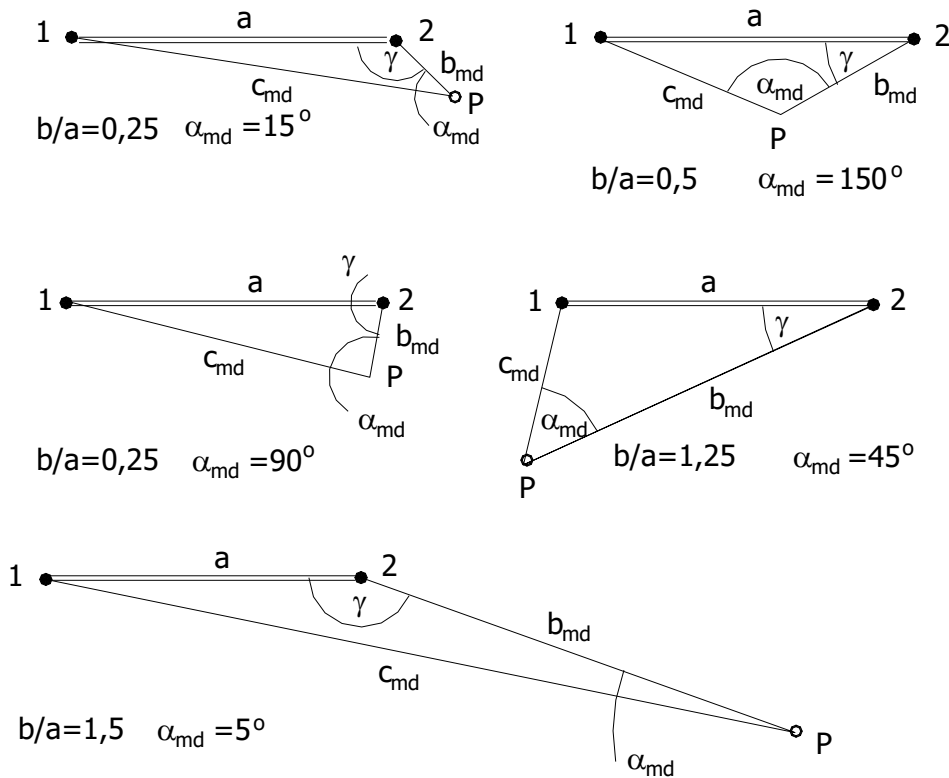


Joonis 4. Goryainovi valemi elemendid [Goryainov jt, 2015]. Indeks „md“ tähendab mõõdetud, indeks „arv“ – arutatud.

Peale joonisel 4 toodud põhikujundi arvutas Goryainov oma valemiga veel joonisel 5 toodud kujundite vead joonelis-nurgalisel vastulöikele kahele punktile.

Goryainov väidab analoogiliselt [Vivat, jt, 2018] graafikult (joonis 2) tuletatuga, et löikenurga  $\alpha$  suurus mõjutab joonelis-nurgalise löike vigasid tühiselt ja et klassikaliste nurgaliste ja jooneliste löigete löikenurga piirangud ( $30^\circ \pm \alpha \pm 150^\circ$ ) kaotavad mõtte.

Peab mainima, et Goryainovi valem (5) ja komplekt (6)...(10) annavad erinevaid tulemusi, kui neid rakendada joonistel 3...5 toodud kujunditele, pealegi, nagu eelpool mainitud, tekib teine, veidi keerukam piirang.



Joonis 5. Goryainovi ülejäänud kujundid [Goryainov, 2015].

Sama võib esialgu järeltada ka ligikaudsest valemist [Avakjan, 2016], sest selles puudub löikenurga suurus.

$$M = \sqrt{\frac{1}{n} \left( m_L^2 + L^2 \frac{m_\beta^2}{\rho^2} \right)}, \quad (11)$$

kus  $n$  – löikesuundade arv;  $L$  – löikesuundade keskmine pikkus;  $m_\beta$  – nurgamõõtmise KRV;  $m_L$  – joonemõõtmise KRV.

Avakjan selgitab aga edasi, et valem kehtib, kui  $L \leq a$  (baasjoone pikkus). Vastasel korral kasvab määratava

punkti asendi viga võrdeliselt löikejoonte ja baasjoone pikkuste suhtega, mis tähendab, et viga on korrelatsioonis suhtega  $L/a$ .

Käesoleva artikli autorid töötasid omakorda välja grupi valemeid kahele punktile tehtud joonelis-nurgalise vastulöike vea arutamiseks, diferentseerides Goryainovi toodud joonelis-nurgalise vastulöike algoritmi valemeid. Saadud grupi valemid (12)...(19) erinesid mõnevõrra Goryainovi valemeist (6)...(10) (ka tulemused olid veidi erinevad) ja võimaldasid kontrollida, kas Goryainov ei teinud oma valemis (5) arvestatavaid lihtsustusi (mis ka tõenäoliselt pidasid paika).

$$m_\gamma = \sqrt{\left( \frac{\rho^2}{a^2 \cos^2 \gamma} \right) \left[ \sin^2 \alpha \left( m_c^2 + \frac{c^2 m_a^2}{a^2} \right) + \frac{c^2 \cos^2 \alpha \times m_a^2}{\rho^2} \right]}, \quad (12)$$

kus  $a$  on baasjoone pikkus;  $m_a$  – võrdub baasjoone ühe lõpppunkti veaga;  $\gamma$  – baasiga külgnev nurk;  $\alpha$  – löikenurk;  $b$  – arvutustes põhiline löikejoon;  $c$  – teine löikejoon.

Baasjoone lõpppunkti vea, eeldades, et baasjoone lõpppunktide koordinaadid määrati ligikaudu samas kohas asunud punktist Q kui seekordne määratav punkt P, saame üldtuntud valemeist

$$m_{\Delta X, Q, 2} = \sqrt{m_b^2 \cos^2 \alpha_{Q, 2} + \frac{b^2 \sin^2 \alpha_{Q, 2} m_{\alpha, Q, 2}^2}{\rho^2}}, \quad (13)$$

$$m_{\Delta Y, Q, 2} = \sqrt{m_b^2 \sin^2 \alpha_{Q, 2} + \frac{b^2 \cos^2 \alpha_{Q, 2} m_{\alpha, Q, 2}^2}{\rho^2}}, \quad (14)$$

kus  $m_b$  on lõikejoone  $b$  pikkuse KRV;  $\alpha_{P, 2}$  – suuna P.2 direktsiooninurk.

Edasi leiame baasi 1.2 direktsiooninurga keskmise ruutvea

$$m_{\alpha(1,2)} = \frac{\rho \sqrt{m_{\Delta Y}^2 (\Delta X_{1,2})^2 - m_{\Delta X}^2 (\Delta Y_{1,2})^2}}{(\Delta X_{1,2})^2 + (\Delta Y_{1,2})^2}, \quad (15)$$

kus  $\Delta X_{1,2}$ ,  $\Delta Y_{1,2}$  – baasjoone koordinaatide juurdekasvud;  $m_{\Delta X}$ ,  $m_{\Delta Y}$  – nende juurdekasvude vead. Siinjuures arvestame, et  $(\Delta X_{1,2})^2 + (\Delta Y_{1,2})^2 = a^2$ . Lihtsuse mõttes eeldame, et  $\alpha_{1,2} = 90^\circ$ , siis  $\Delta X_{1,2} = 0$  ja  $\Delta Y_{1,2} = a$  või  $\alpha_{1,2} = 0^\circ$  ja siis  $\Delta X_{1,2} = a$  ja  $\Delta Y_{1,2} = 0$ , ja nii saame lõplikult

$$\text{kas} \quad m_{\alpha(1,2)} = \frac{\rho \times m_{\Delta X(1,2)}}{a} \quad (16)$$

$$\text{või} \quad m_{\alpha(1,2)} = \frac{\rho \times m_{\Delta Y(1,2)}}{a}.$$

Nüüd võis leida juba lõpetavate valemite komplekti:

$$m_{\alpha(2,P)} = \sqrt{m_{\alpha(1,2)}^2 + m_{\gamma}^2}, \quad (17)$$

$$m_{\Delta X(2,P)} = \sqrt{\frac{b^2 \sin^2 \alpha_{2,P} \times m_{\alpha(2,P)}^2}{\rho^2} + m_b^2 \cos^2 \alpha_{2,P}}, \quad (18)$$

$$m_{\Delta Y(2,P)} = \sqrt{\frac{b^2 \cos^2 \alpha_{2,P} \times m_{\alpha(2,P)}^2}{\rho^2} + m_b^2 \sin^2 \alpha_{2,P}}. \quad (19)$$

Joonistel 3, 4 ja 5 toodud kujundite vastulõikega määratavate punktide Ст.1 ja P vead (joonise 3 puhul sooritati arvutused eraldi kujunditele M1–Op2–Ст.1 ja Op2–Op4–Ст.1) arvutati võrdluseks valemitega (1)...(4); (5); (6)...(10);

ja (12)...(19). Eeldati, et baaspunkt, millelt määrati lähtepunktide koordinaadid, asus ligikaudu samas kohas kui määratavad punktid Ст.1 ja P ja kõik mõõtmised toimusid elektrontahhümeetriga Trimble M3 2" ühe täisvõttega.

### Vaadeldud valemite ja valemikomplektide võrdlus

Peab märkima, et erinevate meetoditega saadi tunduvalt erinevaid tulemusi.

- Goryainovi valemiga (5) arvatud vead olid võrdlemisi ühtlased 4...5 mm.
- Goryainovi valemikomplektiga (6)...(10) arvatud vead kõikusid üldjuhul piirides 4...15 mm.
- Klassikalise valemikomplektiga (1)...(4) leitud vead osutusid üldjuhul piirides 5...20 mm.
- Käesoleva artikli autorite valemikomplektiga leitud vead osutusid üldjuhul piirides 4...10 mm.

Lõpuks kontrolliti valemitega leitud vastulõike vigade korrelatsiooni lõikenurkadega ja lõikejoone ning baasjoone suhtega. Üle  $90^\circ$  lõikenurgad taandati teravnurkadeks valemiga  $\alpha' = 180^\circ - \alpha$ . Osutus, et vigade ja lõikenurkade suuruste korrelatsioon oli negatiivne (mida oligi oodata) ja suhteliselt väike (kuni  $-0,46$ ), välja arvatud Avakjani valem (11), mille puhul saadi  $-0,85$ .

Lõikejoone ja baasjoone pikkuse suhte ning erinevate valemitega saadud vigade väärtuste korrelatsiooni hindamisel saadi kõige suurem (peaaegu funktsionaalne korrelatsioon 0,96) käesoleva artikli autorite valemitega leitud vigade puhul. Ülejäänud valemid andsid korrelatsiooni piirides 0,31...0,66. Seega võib eeldada, et kahele punktile sooritatud nurgalis-joonelise lõike aprioorse täpsushinnangu võiks eelistatavalt sooritada valemikomplektiga (12)...(19). Komplekt on küll võrdlemisi kohmakas, kuid EXCELis se programmeeritult ei tohiks tekitada probleeme.

### Nikonovi tehtud mõõtmiste alusel võib veel järeldada:

Kolmele punktile tehtud vastulõige on soovitamam, sest kuigi ühe lähtepunkti väikesed vead või nihked tekitavad üldjuhul kolm korda väiksema määratava punkti nihke, tuleks ikkagi võtta tarvitusele abinõud orientatsiooni täpsustamiseks.

Kui pole võimalik tagada, et lõikejooned  $L$  oleksid baasist  $a$  lühemad, siis tuleks kindlasti kasutada vastulõiget kolmele punktile.

### Arvestades valemite võrdlust ja Nikonovi mõõtmisi võib teha kokkuvõtte:

1. Lõikejoonte ( $L$ ) ja baasi pikkuse ( $a$ ) suhtes peaks kehtima võrratus  $L \leq a$  (nagu soovitas ka Avakjan).
2. Näib, et juhul  $L > a$  ei kasva viga mitte proportsiooniliselt, vaid eksponentselt suhtega  $L/a$ , mis nähtub ka jooniselt 1 ja joonisel 3 toodud kujundi Op2–Ст.1–Op1 arvutustest valemitega (12)...(19). Seetõttu tuleks olukorda  $L > a$  vältida või kasutada vastulõiget kolmele punktile.

**Kasutatud kirjandus:**

Avakjan, V. Prikladnaja geodezija. Tehnologija inženerno-geodezičeskikh rabot. Moskva Infra-Inženerija, 2016.

Goryainov, I., Length-angle Resection: A New Look at the Geometry of Geodetic Intersection. Kiev Inženernõje izõskanija, 7/2015.

Kiselev, M., Mihelev, D. Geodezija. Moskva. Izdatelskij centr "Akademija", 2008.

Nikonov, A., Šeševa, I., Lifašina, G. The Analysis Accuracy of Resection Under Instability Geodetic Base. Announcer Siberian State Academy of Geodesy, N4 (24), 2013.

Vivat, A., Litynskyy, V., Litynskyy, S. Investigation of Accuracy Position Determination by the Method of an Inverse Linear-angular Resection Performed by Total Station. <https://www.researchgate.net/publication/326493836>, 2018.



**Markato**

**GEOMAX**

→ Nivelliirid  
→ Tahhümeetrid  
→ GPS-d  
→ Lokaatorid  
→ Skännerid  
→ Lisavarustus  
→ Märkimisvärvid

GEOMAXi sõdalased  
töötavad iga ilmaga

Mööteriistade müük, hooldus  
ja rent aastast 1998.

Markato MK OÜ  
Pärnu mnt 102, Tallinn  
Tel: 65 49 470, 56 51 242  
[www.markato.ee](http://www.markato.ee)

Universaalne väliarvuti tarkvara X-PAD Windows ja Android platvormil, mis ühildub skännerite, GPS-de ja paljude tahhümeetritega. Väliarvutina võimalik kasutada ka telefoni ja tahvelarvutit. Palju uusi funktsioone.

[WWW.MARKATO.EE](http://WWW.MARKATO.EE)

**GEOMAX**